INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

RESUMEN

1.- INTRODUCCIÓN.

1.1 Definición de Primitiva

F es función primitiva de f $\Leftrightarrow$ Para todo elemento del Dom(f) $\Rightarrow$ F´(x)=f(x)

1.2 Representación de Primitivas

Si F es función primitiva de f en un intervalo I

$\Downarrow$

G es función primitiva de f en un intervalo I $\Leftrightarrow$ G(x)=F(x) + C para C= constante y para todo x de I

1.3 Notación Integral para las primitivas

Integral indefinida de f(x) respecto de x $\Rightarrow$ $\int f(x)dx$ = F(x) + C para C=cte.

$\Updownarrow$

F es función primitiva de f

1.4 Reglas básicas de integración

Derivación	Integración
$\frac{d(C)}{dx} = 0$	$\int 0dx = C$
$\frac{d(kx)}{dx} = k \quad k \neq 0$	$\int kdx = kx + C \quad k \neq 0$
$\frac{dkf(x)}{dx} = kf\acute{}(x)$	$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$
$\frac{d(f(x) \mp g(x))}{dx} = \quad f\acute{}(x) \mp g\acute{}(x)$	$\int (f(x) \mp g(x))dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$
$\frac{dx^n}{dx} = \quad nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

2.- INTEGRAL DEFINIDA.

2.1 Partición de un intervalo. Norma de una partición.

- Una partición Δ del intervalo cerrado [a,b] es un conjunto finito de puntos $\Delta = \{x_{1,} x_{2,} x_{3,} \dots x_{n,}\}$ tal que a=x_0<x_1<x_2<…<x_{n-1} <b=x_n

- La diferencia máxima entre dos puntos consecutivos de la partición se llama norma de la partición y se denota por $\|\Delta\|$, es decir:

$$\|\Delta\| = max\{x_j - x_{j-1}\} \text{ para j=1…n}$$

- Si todos los intervalos de la partición son iguales, decimos que la partición es regular y, entonces:

$$\|\Delta\| = \frac{b-a}{n}$$

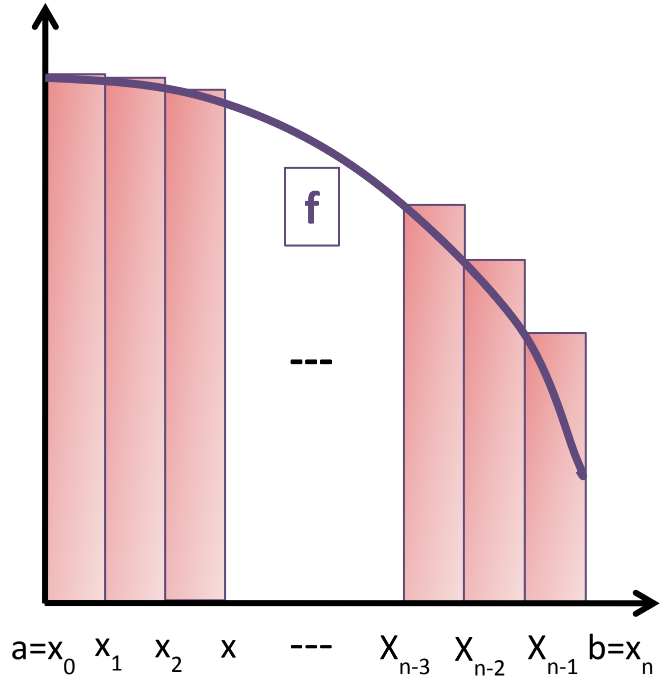
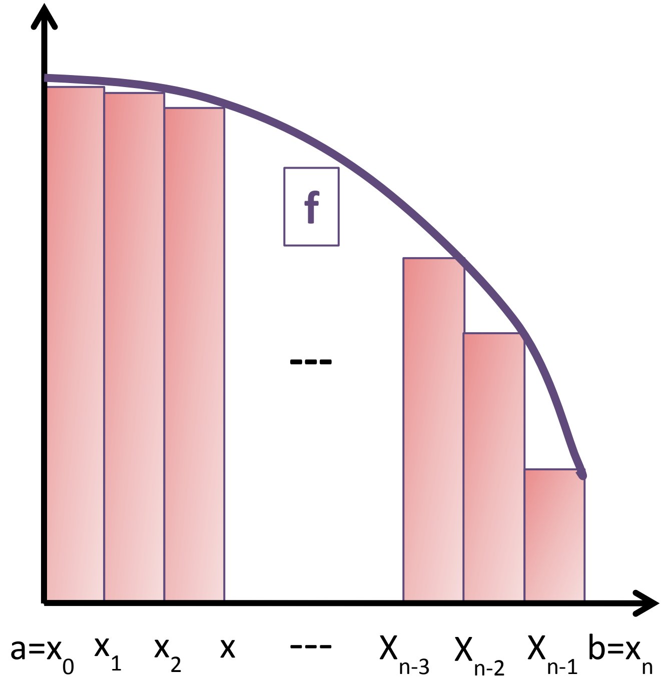
En general, para cualquier partición, la norma está relacionada con el número de subintervalos de [a,b] como sigue:

$$\frac{b-a}{\|\Delta\|} \leq n$$

Luego, cuando $\|\Delta\| \to 0$ se verifica que $n \to \infty$

2.2 Sumas inferiores y superiores

Sea f una función definida en [a,b] acotada y $\Delta = \{x_{1,}x_{2,}x_{3,}\ldots x_{n,}\}$ una partición de [a,b]

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Suma superior de f respecto de Δ:
$S(f,\Delta) = \sum_{j=1}^{n} s_j\,(x_j - x_{j-1})$ para $s_j = supremo\ de\ [x_j, x_{j-1}]$</td>
<td>Suma inferior de f respecto de Δ:
$I(f,\Delta) = \sum_{j=1}^{n} i_j\,(x_j - x_{j-1})$ para $i_j = ínfimo\ de\ [x_{j-1}, x_j]$</td>
</tr>
<tr>
<td>La suma superior <u>disminuye</u> a medida que se refina la partición Δ.</td>
<td>La suma inferior <u>aumenta</u> a medida que se refina la partición Δ.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">SUMA DE RIEMANN: $\sum_{j=1}^{n} f(c_j)(x_j - x_{j-1})\ para\ x_{j-1} \le c_j \le x_j$</td>
</tr>
</table>

2.3 Integral de RIEMANN. Definición de Integral Definida.

- Integral Superior = inf $\{S(f,\Delta)\ \ para\ \Delta = partición\ de\ [a,b]\}$
- Integral Inferior = sup $\{I(f,\Delta)\ \ para\ \Delta = partición\ de\ [a,b]\}$
- Si Integral Superior = Integral Inferior se dice que la función f es RIEMANN integrable y la integral de RIEMANN de f sobre $[a,b]$ se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

siendo: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta_{x_j}$ **la INTEGRAL DEFINIDA de f entre a y b.**

2.4 La continuidad implica integrabilidad.

Si f es continua en $[a, b]$ $\Rightarrow$ f es integrable en $[a, b]$

2.5 Integral definida como área de una región.

f continua en $[a, b]$
^ $\Rightarrow$ El área de la región comprendida entre f, X, x=a y x=b viene dada por:
f no negativa en $[a, b]$

área = $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

2.6 Propiedades de las integrales definidas.

f definida en x=a: $\int_a^a f(x)dx = 0$	f integrable en $[a,b]$: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	f integrable en $[a,b],[a,c]\ y\ [c,b]$: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
f y g integrables en $[a,b]$ y k=cte: ▪ $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ ▪ $\int_a^b \big(f(x) \mp g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b f(x)dx$		▪ $\lvert f \rvert$ integrable: $\left\lvert \int_a^b f(x)dx \right\rvert \le \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$ ▪ Si f y g es integrables Riemann en [a,b] / $0 \le g(x) \le f(x)$ en [a,b]: $\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$

2.7 Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea f: [a,b] $\rightarrow$ R integrable.

Definimos F: [a,b] $\rightarrow$ R / F(x) = $\int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$

Entonces: 1º.- F es continua en $[a,b]$

^

2º.- Si f es continua en "c" para $c \in (a,b)$ $\Rightarrow$ F es derivable en "c" y F´(c) = f(c)

(en particular, si f es continua en $[a,b] \Rightarrow$ F es derivable en $[a,b]$ y F´(c) = f(c) $\forall x \in [a,b]$

2.8 Evaluación de la integral: Regla de Barrow.

Relaciona el cálculo integral con el cálculo diferencial.

1º.- Si f es una función integrable Riemann definida en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$

^

2º.- F es primitiva de f en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ (F´(x)=f(x) $\forall x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$)

Entonces: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2.9 Integral de Riemann para funciones no positivas.

Sea f una función real "no positiva" definida en el intervalo [a,b]. Descomponemos f en dos funciones $f^+(x)$ y $f^-(x)$ definidas como sigue:

$$f^+(x) = \max\{ f(x), 0 \} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \max\{ -f(x), 0 \}$$

Ambas funciones son positivas y f se puede definir en base a ellas del siguiente modo:

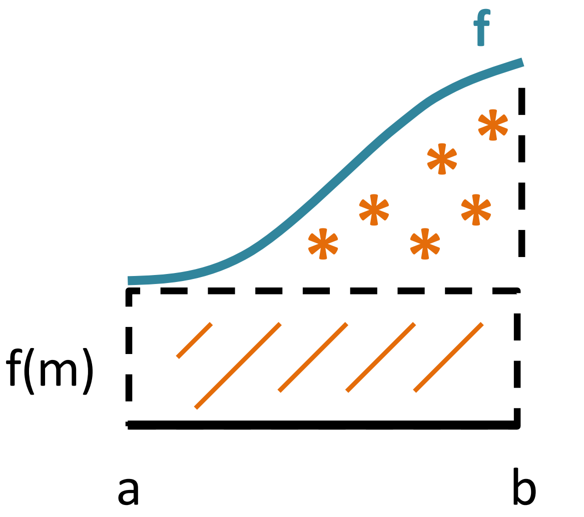
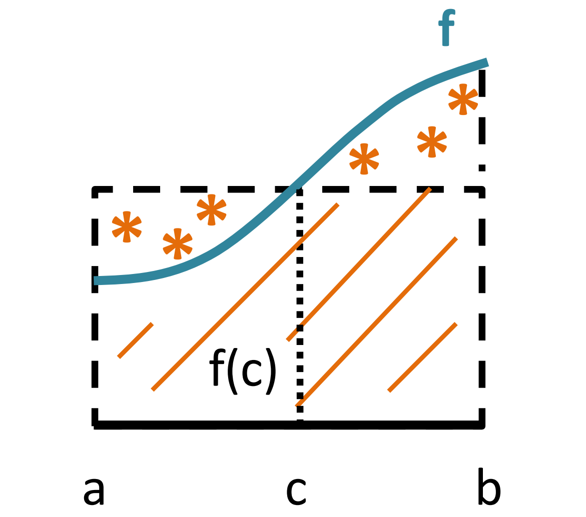
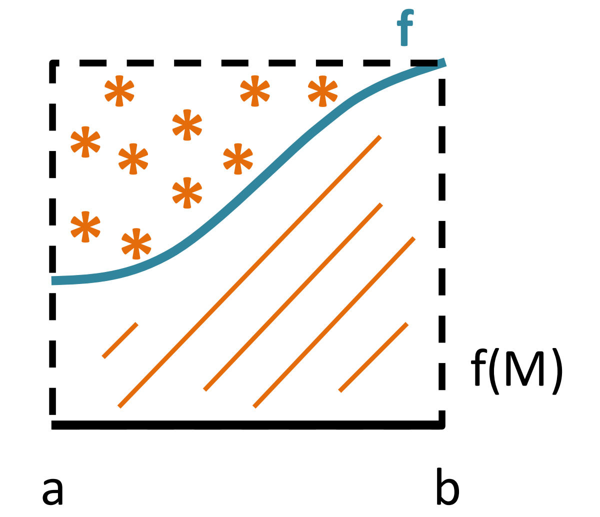
$$\mathbf{f(x) = f^+(x) - f^-(x)}$$

Así que el problema se reduce a calcular la integral de dos funciones positivas. Tenemos, por tanto, que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

2.10 Teorema del Valor Medio para Integrales.

f continua en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \Rightarrow \exists c \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ / $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>< Rectángulo inscrito >
Área menor que la de la región.</td>
<td>< Rectángulo del valor medio >
Área igual que la de la región.</td>
<td>< Rectángulo circunscrito >
Área mayor que la de la región.</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int_a^b f(m)dx = f(m)(b-a)$</td>
<td>$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$</td>
<td>$\int_a^b f(M)dx = f(M)(b-a)$</td>
</tr>
</table>

“no especifica cómo determinar c, sólo garantiza su existencia”

2.11 Definición del Valor Medio de una Función.

Si f es integrable en [a,b]: Valor medio de f en [a,b] $= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

2.12 Primitiva de una función compuesta.

Sean f , g y $g \circ f$ continuas en un intervalo I.

Si F es una primitiva de f en I: $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C$

3.- TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN. (REPASO).

- Integración por sustitución.
- Integración por partes.
- Método tabular: aplicación repetida de la integración por partes.
- Integración de funciones trigonométricas:
  - Integrales que contienen potencias del seno positivas e impares.
  - Integrales que contienen potencias del coseno positivas e impares.
  - Integrales que contienen potencias del seno no negativas y pares.
  - Integrales que contienen potencias del coseno no negativas y pares.
  - Integrales que contienen secantes y tangentes: Potencia de la secante positiva y par.
- Integración de funciones racionales:
  - Descomposición: Factores lineales diferentes.
  - Descomposición: Factores lineales repetidos.

(ejercicios 1 a 26 resueltos y taller)